単葉関数論における convolution の応用について(Convolution の新しい展開)

斉藤, 斉

数理解析研究所講究録
1012巻 1997年 143-163

単葉関数論におけるconvolutionの応用について

群馬高専 斎藤 斉 (Hitoshi Saitoh)

ある2つの正則関数のHadamard product または convolutionは、微分作用素や積分作用素を定義する. これらは単葉関数論の研究によく用いられる. ここでは、単葉関数論におけるconvolution の歴史を概観し、応用について述べる.

§1 準 備

$U = \{z : |z| < 1\}$ を単位円板とする. AでUで正則な関数族を表す. 以下, Aの部分族を次のような記号で表す.

$S \subset A$: 単葉かつ $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ で正規化された族 (univalent)

$C \subset S$: 凸型関数族 (convex)

$S^* \subset S$: 星型関数族 (starlike)

$K \subset S$:　近接凸関数族（close-to-convex）

$P \subset A$:　$p(0)=1$ で正規化された正の実部をもつ関数族

$P' \subset S$:　$f' \in P$ となる S の部分族

$f,\ g \in A$ が $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ で表されるとき．

$$(f * g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$$

を f と g の Hadamard product または convolution とよぶ．

$f \in A$ に対して convolution operator

$$\Gamma : A \longrightarrow A$$

が $\Gamma(g) = f * g$ により定義される．

§2　Robinson による線形作用素

R.M. Robinson [3] によると，作用素 $\mathcal{L}$ が線形とは

(1)　$\mathcal{L}\{f(z)+g(z)\} = \mathcal{L}f(z) + \mathcal{L}g(z)$

(2)　$\mathcal{L}\{cf(z)\} = c\mathcal{L}f(z)$

(3)　$f_n(z) \longrightarrow f(z)$ なら $\mathcal{L}f_n(z) \longrightarrow \mathcal{L}f(z)$

が成り立つことである．

(3) における収束は単位円内での一様収束を意味する.
次の4つの作用素はすべて線形である.

$$P_1 f(z) = zf(z), \qquad P_2 f(z) = \int_0^z f(\zeta)d\zeta$$

$$Q_1 f(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z}, \quad Q_2 f(z) = f'(z)$$

P_1, P_2 を位数(order)1, Q_1, Q_2 を位数(order)-1 とよぶことにすると、次の PQ, QP は位数0である.

$$P_k Q_k f(z) = f(z) - f(0), \quad Q_k P_k f(z) = f(z)$$
$$(k=1,2)$$

その他の組み合わせは、位数0の線形作用素として興味ある例を与える.

$$P_1 Q_2 f(z) = zf'(z), \qquad Q_2 P_1 f(z) = (zf(z))'$$

$$P_2 Q_1 f(z) = \int_0^z \frac{f(\zeta)-f(0)}{\zeta} d\zeta, \quad Q_1 P_2 f(z) = \frac{1}{z}\int_0^z f(\zeta)d\zeta$$

$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ とすると、$P_1 Q_2$ と $P_2 Q_1$ は正規化されているが、$Q_2 P_1$ と $Q_1 P_2$ は正規化されていない. そこで以下で与えられる A 上で定義される線形作用素 Γ_i $(0 \leqq i \leqq 4)$ を考える.

$$\Gamma_0 f(z) = zf'(z), \quad \Gamma_1 f(z) = \frac{f(z) + zf'(z)}{2}$$

$$\Gamma_2 f(z)=\int_0^z \frac{f(\zeta)-f(0)}{\zeta}d\zeta\ ,\quad \Gamma_3 f(z)=\frac{2}{z}\int_0^z f(\zeta)d\zeta$$

$$\Gamma_4 f(z)=\int_0^z \frac{f(\zeta)-f(x\zeta)}{\zeta-x\zeta}d\zeta,\quad |x|\leq 1,\ x\neq 1$$

これらの作用素は $\Gamma_i f = h_i * f$ $(0\leqq i\leqq 4)$ で与えられる convolution で表現される．$h_i(z)$ は以下のとおりである．

$$h_0(z)=\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2} \qquad (\text{ケーベ関数})$$

$$h_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2}z^n=\frac{z-\frac{z^2}{2}}{(1-z)^2}$$

$$h_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^n=-\log(1-z)$$

$$h_3(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n+1}z^n=\frac{-2[z+\log(1-z)]}{z}$$

$$h_4(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-x^n}{(1-x)n}z^n=\frac{1}{1-x}\log\left[\frac{1-xz}{1-z}\right],$$

$$|x|\leq 1,\ x\neq 1$$

(注)　Γ_2 の一般化である Γ_4 は Pommerenke [4] により用いられた．

§3　種々の半径について

X を A のあるコンパクトな部分族とする．$r_S(X)$ で X におけるすべての関数 f に対する最小の単葉半径を表す．同様に $r_{S^*}(X)$，$r_C(X)$，$r_K(X)$ などを定義する．

作用素 Γ_1 については，1947年に Robinson [3] が次のことを示した．

$$r_S[\Gamma_1(k)] = \frac{1}{2}\ ,\quad \text{ただし，}\quad k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

多くの人達が S のいくつかの部分族上の作用素 Γ_i $(0 \leq i \leq 4)$ に対する最小半径について研究している．これらの中からいくつかを紹介する．

Alexander (1915) [5]　　$r_{S^*}[\Gamma_0(S)] = r_{S^*}[\Gamma_0(S^*)]$

$$= 2 - \sqrt{3}$$

Livingston (1966) [6]　　$r_C[\Gamma_1(C)] = r_{S^*}[\Gamma_1(S^*)]$

$$= r_K[\Gamma_1(K)] = \frac{1}{2} \quad \text{および}$$

$$r_{P'}[\Gamma_1(P')] = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$r_{S^*}[\Gamma_1(S^*)] = \frac{1}{2}$ を具体的に書けば次のようになる．

"$F(z) \in S^* \Rightarrow f(z) = \frac{1}{2}(zF(z))'$ は $|z| < \frac{1}{2}$ で星型である．"

その他も同じように表現される．これらの結果の一般化は Libera，Livingston [7] や，Bernardi [8] などによ

り得られている．作用素Γ_2については，次が知られている．

<u>Causey</u> (1967) [9]　　$r_K[\Gamma_2(K)] = 1$

またΓ_3については次のLiberaによる研究が有名であり、多くの拡張が得られている．

<u>Libera</u> (1965) [10]　　$r_C[\Gamma_3(C)] = r_{S^*}[\Gamma_3(S^*)]$

$$= r_K[\Gamma_3(K)] = 1$$

Liberaの結果はBernadiにより次のように拡張されています．

<u>Bernardi</u> (1969) [11]　　$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S^*$とする．

$(c = 1, 2, 3, \cdots)$．このとき．

$$g(z) = \frac{c+1}{z^c}\int_0^z t^{c-1} f(t)\, dt \in S^* .$$

作用素Γ_4については、次のPommerenkeの結果がよく知られている．

<u>Pommerenke</u> (1965) [4]　　$r_K[\Gamma_4(K)] = 1$

§4　Pólya-Schoenberg予想と関連した話題

G. PólyaとI. J. Schoenbergにより、次の予想が1958年に与えられた．[12]

" f, g : convex in U $\Rightarrow$ $f*g$: convex in U "

これに対して，Suffridge は次のことを証明した．

Suffridge (1966) [13]　f, g : convex in U

$$\Rightarrow f*g : \text{univalent in } U$$

そして、この予想は S. Rusheweyh と T.S. Small により1973年に解決された．[14] この論文ではこれ以外の convolution に関する結果を含んでいる．それらのいくつかを以下に紹介する．

定理 1（Pólya-Schoenberg予想）

$$f, g : \text{convex} \Rightarrow f*g : \text{convex}$$

定理 2　φ : convex, f: close-to-convex

$$\Rightarrow \varphi * f : \text{close-to-convex}$$

定理 3　φ, ψ : starlike of order $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \varphi * \psi : \text{starlike of order } \frac{1}{2}$$

定理 4（Wilfにより予想されたサブオーディネーションに関する定理）

$$\varphi, \psi : \text{convex}, \quad f \prec \psi \Rightarrow \varphi * f \prec \varphi * \psi$$

これらの証明には彼等により与えられた convolution についての補助定理が用いられる．

§5 Rusheweyh 微分について

Pólya と Schoenberg の仕事[12]に触発され、Ruscheweyh はある微分作用素を導入し、これを単葉関数論に応用した([15])．この論文について若干述べてみたい．

$f\in A$ に対して，次の条件をみたす部分族 K_n を定義する．

$$f\in K_n \underset{def.}{\Longleftrightarrow} \mathrm{Re}\,\frac{(z^n f)^{(n+1)}}{(z^{n-1}f)^{(n)}} > \frac{n+1}{2} \quad (z\in U),\ f\in A$$

$$n\in \mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

K_n について次のことが成り立つ．

(1) $f\in K_n \Longrightarrow f:$ univalent

(2) $K_{n+1}\subset K_n \quad ,\quad n\in\mathbb{N}_0$

(3) $K_0=S^*(\frac{1}{2})$: starlike of order $\frac{1}{2}$

$K_1=C$

(注) (2), (3) から $C\subset S^*(\frac{1}{2})$ となり良く知られた結果である．

K_n に含まれる関数の例として，次が代表的である．

$$h_c(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c+1}{c+n}z^n \quad ,\quad \mathrm{Re}\,c\geq\frac{n-1}{2}$$

convolution を用いて、Ruscheweyh は次の微分作用素 D^α を導入した．

$$D^{\alpha} f = \frac{z}{(1-z)^{\alpha+1}} * f \quad , \alpha \geq -1$$

我々はこれを Ruscheweyh 微分とよぶ．これを用いると、次のことがわかる．

（1）$D^n f = \dfrac{z(z^{n-1} f)^{(n)}}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_0$

（2）$f \in S^*(\frac{1}{2}) \Longleftrightarrow \operatorname{Re} \dfrac{D^1 f}{D^0 f} > \dfrac{1}{2}$ $(z \in U)$

（3）$f \in C \Longleftrightarrow \operatorname{Re} \dfrac{D^2 f}{D^1 f} > \dfrac{1}{2}$ $(z \in U)$

（4）$f \in K_n \Longleftrightarrow \operatorname{Re} \dfrac{D^{n+1} f}{D^n f} > \dfrac{1}{2}$ $(z \in U)$

（これから K_n は $S^*(\frac{1}{2})$ と C の自然な拡張であることがわかる．）

（5）$f \in K_{-1} \Longleftrightarrow \operatorname{Re} \dfrac{f(z)}{z} > \dfrac{1}{2}$ $(z \in U)$

（注）$\Gamma_0 f(z) = z f'(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2} * f(z) = D^1 f(z)$

$$\Gamma_1 f(z) = \frac{f(z) + z f'(z)}{2} = \frac{1}{2}\left(D^0 f(z) + D^1 f(z)\right)$$

（注）p.6 の Bernadi の積分作用素は次のように、convolution で与えられる．（p.8 の h_c を参照）

$$\frac{c+1}{z^c} \int_0^z t^{c-1} f(t)\, dt = (h_c * f)(z)$$

この論文[15]で Rusheweyh が主張したかった結果は、次の定理である.

定理 $n\in\mathbb{N}_0$, $\mathrm{Re}\, c \geq (n-1)/2$ とする. このとき
すべての $f\in K_n$ に対して $f * h_c \in K_n$ が成り立つ. 特に $h_c \in K_n$ である.

これは Pólya と Schoenberg の次の結果の拡張となっている.

" $\mathrm{Re}\, c = 0$ とする. すべての $f\in C$ に対して
$f * h_c \in C$, $h_c \in C$. "

Rucheweyh はこの論文の最後で

(1) K_α はどのような族か. ($\alpha \geq -1$)

(2) K_α は Hadamard product のもとで閉じているか

という問題を提出している. これが prestarlike という族を考える動機となっている.

1977年 Ruscheweyh は[16]において prestarlike の概念を導入し、[15]で提出した問題に言及している.

$$\frac{z}{(1-z)^{2(1-\alpha)}} = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(\alpha,k) z^k \quad , \alpha \leq 1$$

とすると, $\gamma(\alpha,k) = \dfrac{\Gamma(1+k-2\alpha)}{\Gamma(2-2\alpha)\Gamma(k)}$ である. ここに

Γ はガンマ関数を表す.

これに関連して Suffridge [17] が 以下の定理A, B, C を得ている.

定理A　$\alpha \leq 1$ とする. このとき

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma(\alpha,k)a_k z^k,\ g(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma(\alpha,k)b_k z^k\in S^*(\alpha)$$

とすれば $h(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma(\alpha,k)a_k b_k z^k \in S^*(\alpha)$

(注) $h(z)$ は $(f*g)(z)$ ではない.

定理B　$\alpha\leq\beta\leq 1$ とする. このとき

$$\sum_{k=1}^{\infty}\gamma(\alpha,k)a_k z^k\in S^*(\alpha)\Longrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\gamma(\beta,k)a_k z^k\in S^*(\beta)$$

(注) 定理Aで $\alpha=0$ とおくと, p.7 の定理1になる. また、$\alpha=1/2$ とおくと定理3になる. さらに、定理Bで $\alpha=0$, $\beta=1/2$ とおくと良く知られた、Marx と Strohhäcker の結果と一致する. i.e.,

$$\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}ka_k z^k\in S^* \\ \| \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k z^k\in C\end{array}\quad\Longrightarrow\quad\sum_{k=1}^{\infty}a_k z^k\in S^*\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

C_α $(\alpha\leq 1)$ でタイプ α の close-to-convex の族を表すことにする. すなわち $f\in A$ に対して, $g\in S^*(\alpha)$ が存在して

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{g(z)}\right\} > 0 \quad (z \in U) \quad \text{が成り立つとする.}$$

これに対して、次が成り立つ.

定理C　$\alpha \leq 1$ とする. このとき

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma(\alpha,k)a_k z^k \in C_\alpha,\ g(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma(\alpha,k)b_k z^k \in S^*(\alpha)$$

$$\Longrightarrow h(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma(\alpha,k)a_k b_k z^k \in C_\alpha$$

(注)　定理Cで $\alpha=0$ とおくと、p.7の定理2となる.

ここで、prestarlike の定義を与える.

$f \in A$ が prestarlike of order α $(\alpha \leq 1)$ とは

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left\{\dfrac{f(z)}{zf'(0)}\right\} > \dfrac{1}{2} & (\alpha = 1) \\ \dfrac{z}{(1-z)^{2(1-\alpha)}} * f(z) \in S^*(\alpha) & (\alpha < 1) \end{cases} \quad (z \in U)$$

のときで、この族を R_α と書く.

(注)　prestarlike の定義は次のような表現も可能である.

$f \in A$ のとき,

$$f \in R_\alpha \ (\alpha \geq -1) \Longleftrightarrow \operatorname{Re}\left\{\frac{D^{\alpha+1}f}{D^\alpha f}\right\} > \frac{1}{2} \quad (z \in U)$$

(p.9の(4)を参照)

prestarlike で表現すると、定理A, B, Cは次のようになる.

定理A′　$f, g \in R_\alpha \ (\alpha \leq 1) \Longrightarrow f * g \in R_\alpha$

定理B′　$\alpha \leq \beta \leq 1 \Longrightarrow R_\alpha \subset R_\beta$

定理C′　$f \in C_\alpha, \ g \in R_\alpha \ (\alpha \leq 1) \Longrightarrow f * g \in C_\alpha$

（注）$R_{1/2} = S^*(\frac{1}{2})$, $R_0 = C$

prestarlike の概念はすでに[15]で考えられており、p.10 の問題（1）,（2）に対する解答が定理A′, 定理B′である．これらの結果はすべて次の定理に含まれる．

定理D（Ruscheweyh[16]）　$\alpha \leq \beta \leq 1$, $f(z) \in A$ とし、

$p(z) \in S^*(1+\alpha-\beta)$ は $\overline{U}$ で正則であるとする．

$g(z) \in R_\beta$ に対し，T を A に作用する連続な線形作用素とする．

$$f \longmapsto (Tf)(z) := \left[g(yz) \frac{p(y)}{y} *_y f(y) \right] \Bigg|_{y=1}$$

このとき，$T : R_\alpha \longrightarrow R_\beta$

（注）$*_y$ は y についての巾級数に関する Hadamard product を表す．定理Dで $p(y) = y$, $\alpha = \beta$ とすれば定理A′を表し，$p(y) = y$, $g(y) = \frac{y}{1-y}$ とおけば、定理B′となる．

§6 ガウスの超幾何関数と convolution

ここで単葉関数論によく現れる作用素を振り返ってみよう．

< 1 > (Biernaki 1960)

$$f \longmapsto Bf := \int_0^z \frac{f(t)}{t}\,dt$$

$$\begin{array}{ccc} \cap & & \cap \\ S^* & & C \end{array}$$

< 2 > (Libera 1965)

$$f \longmapsto Lf := \frac{2}{z}\int_0^z f(t)\,dt$$

$$\begin{array}{ccc} \cap & & \cap \\ C & & C \\ S^* & & S^* \\ K & & K \end{array}$$

< 3 > (Bernardi 1969)

$$f \longmapsto B_c f := \frac{1+c}{z^c}\int_0^z t^{c-1} f(t)\,dt\,, \quad c \in \mathbb{N}_0$$

< 4 > (Ruscheweyh 1975)

$$f \longmapsto B_n^{-1} f := \frac{z\,(z^{n-1}f(z))^{(n)}}{n!}$$

< 5 > (Livingston 1966)

$$f \longmapsto L^{-1} f := \frac{(zf(z))'}{2}$$

<6> (Hohlov 1984)

$$f \longmapsto F(a,b,c)f := z \cdot {}_2F_1(a,b;c;z) * f(z)$$

ここで $\displaystyle {}_2F_1(a,b;c;z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k (1)_k} z^k$

$\displaystyle (a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$, $f \in S$.

(注) Hohlovは $F(a,b,c)$ を S 内の線形超幾何作用素 (a linear hypergeometric operator in the class S) とよんでいる. <6> で与えられる three-parameter family は<1>から<5>で定義されるすべての作用素を特別な場合として含んでいる. すなわち

$$B = F(1,1,2), \quad B_n^{-1} = F(1,n+1,1)$$

$$B_c = F(1,c+1,c+2)$$

$$L = F(1,2,3), \quad L^{-1} = F(1,3,2)$$

また、 $Bf = F(1,1,2)f = h_2 * f$ であり,

$Lf = F(1,2,3)f = h_3 * f$ となっている. ここで

h_2, h_3 は p.4 の $h_2(z), h_3(z)$ である.

$F(a,b,c)$ については、次のことも良く知られている.

1° (S. Singh) $f \in P' \Longrightarrow F(1,1,2)f \in S^*$

2° (P.T. Mocanu) $f \in P' \Longrightarrow F(1,2,3)f \in S^*$

単葉性に関して，Hohlovは次のことを示している．

定理（Hohlov 1984）　$(a,b,c)\in \mathbb{H}\subset \mathbb{R}_+^3$ とする．

さらに，$a>0$，$b>0$，$c>a+b+2$

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b-2)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left((a)_2(b)_2+3ab(c-a-b-2)+(c-a-b-2)_2\right)<2$$

とする．このとき $f\in A$ が単葉なら $F(a,b,c)f$ も単葉である．

最後にCalson-Shafferが導入した作用素について述べる．（[20]参照）

$$\varphi(a,c;z):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n}z^{n+1}\ ,\quad c\neq 0,-1,-2,\cdots\quad (z\in U)$$

とする．$\varphi(a,c;z)=z\cdot {}_2F_1(1,a;c;z)$ である．この φ を用いて，次の作用素を定義する．

$$\mathcal{L}(a,c;z)f:=\varphi(a,c;z)*f\quad ,\ f\in A$$

これをCarlson-Shaffer作用素とよぶ．

（注）　$\mathcal{L}(a,c;z)$ についていくつかの性質について述べる．$\mathcal{L}(a,c)$ と略記する．

〈1〉　$D^n f=\mathcal{L}(n+1,1)f$　：Ruscheweyh微分

〈2〉 $B_c f = \frac{c+1}{z^c}\int_0^z t^{c-1} f(t)\,dt = \mathcal{L}(c+1, c+2)f$

特に $Lf = \mathcal{L}(2,3)f$

〈3〉 $a = 0, -1, -2, \cdots$ のとき $\mathcal{L}(a,c)f$ は多項式

〈4〉 $a \neq 0, -1, -2, \cdots$ ならば $\mathcal{L}(a,c)$ は inverse

$\mathcal{L}(c,a)$ をもつ.

$\mathcal{L}(a,c) : A \longrightarrow A$ は 1対1 で

$\mathcal{L}(a,a)$ が単位元となり,

$\mathcal{L}(a,c) = \mathcal{L}(a,b)\mathcal{L}(b,c) = \mathcal{L}(b,c)\mathcal{L}(a,b)$,

$b, c \neq 0, -1, -2, \cdots$

〈5〉 $g(z) = zf'(z)$ ならば $g = \mathcal{L}(2,1)f$ かつ

$f = \mathcal{L}(1,2)g$

〈6〉 $C(\alpha) = \mathcal{L}(1,2)S^*(\alpha)$

ただし, $C(\alpha)$ は convex of order α の族を表す.

p. 11 の Suffridge による定理A, 定理B は次のように表される.

定理E $\alpha \leq 1$ とすると.

$f, g \in S^*(\alpha) \Longrightarrow f * g \in \mathcal{L}(2-2\alpha, 1)S^*(\alpha)$

定理F $\alpha \leq \beta \leq 1$ かつ $\alpha < 1$ とすると

$\mathcal{L}(2-2\beta, 2-2\alpha)S^*(\alpha) \subset S^*(\beta) \subset S^*(\alpha)$

$M * N := \{ f*g \mid f \in M, g \in N \}$ とおくと、定理E より $S^*(\alpha) * S^*(\alpha) \subset \mathcal{L}(2-2\alpha, 1) S^*(\alpha)$ が言える．しかし、実は

定理E′ $S^*(\alpha) * S^*(\alpha) = \mathcal{L}(2-2\alpha, 1) S^*(\alpha)$, $\alpha \leq 1$

が成り立つ．

また，prestarlike について、次のことがわかる．

$$\begin{cases} R_\alpha = \mathcal{L}(1, 2-2\alpha) S^*(\alpha), & \alpha < 1 \\ R_1 = \left\{ f \in A : \mathrm{Re}\left\{\dfrac{f(z)}{z}\right\} > \dfrac{1}{2}, z \in U \right\} \end{cases}$$

さらに、p.13の定理A′は次のように表される．

定理F $R_\alpha * R_\alpha \subset R_\alpha$, $\alpha \leq 1$

しかし、実は

定理F′ $R_\alpha * R_\alpha = R_\alpha$, $\alpha \leq 1$

が成り立つ．

Carlson-Schaffer の作用素は多葉関数に対しても定義でき、これを用いて単葉関数論の良く知られた結果を含む形で多くの性質が導かれる．詳しくは Saitoh [21], [22] を参照されたい．また、正則関数の単葉性については須川敏幸氏の [23] に詳しい紹介がある．

References

1. J. Hadamard, Essai sur létude des fonctions donées par leur development de Taylor, J. Math. Pures Appl. (4) 8 (1892), 101-186.

2. R. W. Barnard and C. Kellogg, Applications of convolution operators to problems in univalent function theory, Michigan Math. J. 27 (1980), 81-94.

3. R. M. Robinson, Univalent majorants, Trans. A.M.S. 61 (1947), 1-35.

4. Ch. Pommerenke, On close-to-convex analytic functions, Trans. A.M.S. 114 (1965), 176-186.

5. J. W. Alexander, Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions, Ann. of Math. 17 (2) (1915), 12-22.

6. A.E. Livingston, On the radius of univalence of certain analytic functions, P.A.M.S. 17 (1966), 352-357.

7. R. J. Libera and A. E. Livingston, On the univalence of some classes of regular functions, P.A.M.S. 30 (1971), 327-336.

8. S. D. Bernardi, The radius of univalence of certain analytic functions, P.A.M.S. 24 (1970), 312-318.

9. W. M. Causey, The close-to-convexity and univalence of an integral, Math. Z. 99 (1967), 207-212.

10. R. J. Libera, Some classes of regular univalent functions, P.A.M.S. 16 (1965), 755-758.

11. S. D. Bernardi, Convex and starlike univalent functions, Trans. A.M.S. 135 (1969), 429-466.

12. G. Pólya and I. J. Schoenberg, Remarks on de la Vallée Poussin means and convex conformal maps of the circle, Paciffic J. Math. 8 (1958), 295-334.

13. T. J. Suffridge, Convolutions of convex functions, J. Math. Mech. 15 (1966), 795-804.

14. St. Ruscheweyh and T. Sheil-Small, Hadamard products of schlicht functions and Pólya-Schoenberg Conjecture, Comment. Math. Helv. 48 (1973), 119-135.

15. St. Ruscheweyh, New criteria for univalent functions, P.A.M.S. 49 (1975), 109-115.

16. St. Ruscheweyh, Linear operator between classes of prestarlike functions, Comment. Math. Helv. 52 (1977), 497-509.

17. T. J. Suffridge, Starlike functions as limits of polynomials, Advances in complex function theory, Lect. Notes in Math., 505, Springer (1976), 164-202.

18. M. Biernacki, Sur l'integral des fonctions univalentes, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Math. Astronom. Phys. 8 (1960), 29-34.

19. Y. E. Hohlov, Hadamard product, hypergeometric functions and linear operators onto the class of univalent functions, Dokl. Acad. Nauk. Ukr. SSR. Ser. A 7 (1984), 25-27.

20. B.C. Carlson and D.B. Shaffer, Starlike and prestarlike hypergeometric functions, SIAM. J. Math. Anal. 15 (4) (1984), 737-745.

21. H. Saitoh, A linear operator and its applications of first order differential subordinations, Math. Japon. 44 (1996), 31-38.

22. H. Saitoh, On certain subclasses of analytic functions involving a linear operator, preprint.

23. 須川敏幸, 正則関数の単葉性条件と擬等角拡張性, Topics in Complex Analysis, 1995.